Exercice *«Les citrons»*

Population référence : citrons produits dans des conditions reproductibles par la firme agroalimentaire (population infinie).

Soit **X** la variable aléatoire (quantitative continue) : "diamètre des citrons en cm" ;

X suit une loi $\mathcal{N}$ **(**7,0**,** 1,0**)**

Soit **Y** la variable aléatoire (quantitative continue) : " concentration de pesticide absorbée par l'écorce d'un citron en mg/ml" ;

Y suit une loi $\mathcal{N}$ **(**2,5**,** 0,2**)**

***a/* La proportion** de citrons sélectionnées pour la vente dans la population référence (population infinie) **correspond à la probabilité** $P[(5{,}5<X<9{,}0) \cap (Y<2{,}8)]$;

les 2 variables **X et Y étant indépendantes** :

$P[(5{,}5<X<9{,}0) \cap (Y<2{,}8)] = P(5{,}5<X<9{,}0) \times P(Y<2{,}8)$;

en appliquant le changement de variable $W=(X-7{,}0)/1{,}0$ et $Z=(Y-2{,}5)/0{,}2$:

$$
\begin{aligned}
P[(5{,}5<X<9{,}0) \cap (Y<2{,}8)] &= P(5{,}5<X<9{,}0) \times P(Y<2{,}8) \\
&= P(5{,}5-7{,}0 < W < 9{,}0-7{,}0) \times P[Z < (2{,}8-2{,}5)/0{,}2] \\
&= P(-1{,}5 < W < 2{,}0) \times P(Z < 1{,}5) \\
&= [1-P(W>1{,}5) + P(W > 2{,}0)] \times [1-P(Z < 1{,}5)] \\
&= (1-0{,}0668 + 0{,}0228) \times (1-0{,}0668) \\
&= 0{,}9104 \times 0{,}9332 \\
&= 0{,}85
\end{aligned}
$$

b/ Il s'agit de réaliser un **test de conformité** d'une **proportion** observée à une proportion exacte. **Posons Ho** : l'échantillon prélevé est issu de la population référence pour laquelle la proportion de citrons sélectionnés pour la vente est P**=0,85** (calculée en a/, caractérisant la population référence des citrons produits par la firme).

La variable d'échantillonnage Po = « proportion de citrons sélectionnés pour la vente dans un échantillon de 35 citrons » subit, **sous l'hypothèse nulle Ho**, des **fluctuations d'échantillonnage** de nature **binomiale**, **approchable** ($N\Pi=29{,}75$ et $N(1-\Pi)=5{,}25$, sont supérieurs à 5) **par la loi normale** $\mathcal{N}$ **(**0,85**,** 0,06**)**

Calcul de Po

Le tableau sur la page suivante permet d'établir que 23 citrons sont bons pour la vente dans un échantillon de 35 citrons. Po = 23/35

Citrons

diamètre (cm)	concentration pesticide (mg/ml)	Sélection du citron
4,3	2,7	**non**
4,6	2,3	**non**
4,7	2,6	**non**
5,2	2,7	**non**
5,4	**3,0**	**non**
5,8	2,8	oui
6,0	2,4	oui
6,1	2,6	oui
6,1	2,6	oui
6,2	2,7	oui
6,2	**3,1**	**non**
6,5	2,1	oui
6,5	2,7	oui
6,6	2,5	oui
6,7	2,2	oui
6,7	2,6	oui
6,8	2,7	oui
6,8	**2,9**	**non**
6,9	2,6	oui
6,9	2,6	oui
6,9	2,5	oui
7,0	2,7	oui
7,2	2,5	oui
7,3	**3,0**	**non**
7,4	2,6	oui
7,4	2,8	oui
7,7	**2,9**	**non**
7,7	2,7	oui
8,0	2,3	oui
8,3	2,5	oui
8,4	2,5	oui
8,5	2,7	oui
9,0	**3,0**	**non**
9,2	2,6	**non**
9,4	2,4	**non**

Le **critère de test** est $\varepsilon o = (Po-0,85) / 0,06$, qui donne $\varepsilon o=3,20$ pour $Po=0,66$ (23/35), soit $\alpha o=0,14\%$ pour un test bilatéral (lecture de la table de la loi normale centrée réduite). Cette valeur de αo est très inférieure au risque seuil standard $\alpha=5\%$.

<u>Conclusion du test</u> :

On rejette donc **Ho** avec un risque de 1[ère] espèce très faible, pratiquement nul.

Les différences observées sur la proportion de citrons « bons pour la vente » entre la population référence et l'échantillon sont significatives au risque seuil α=5% (et même au risque de 1% !).

<u>Origine possible des différences</u> :

- mesures mal réalisées par le technicien ;
- quelque chose dans la production a changé, les citrons ne sont plus les mêmes ;
- $N\Pi$ est trop proche de 5 pour une approximation normale confortable ;
- l'échantillon n'a pas été tiré au hasard (non représentatif de la population) ;
- etc…

c/ Il s'agit cette fois d'effectuer **un test de conformité** d'une **moyenne** observée à une moyenne référence exacte, ce pour les 2 variables X et Y.

Pour ce 2ème échantillon, chaque moyenne observée est accompagnée de son écart type σ_o. Mais on ne se sert pas de σ_o dans ces tests sur la moyenne !

En effet : μ et σ sont connus pour les 2 variables dans la population référence (attention, la variable d'échantillonnage n'est pas la variable d'étude X mais sa moyenne qui a pour variance σ^2/n ; de même concernant la variable Y).

X étant distribué normalement dans la population, sa moyenne l'est également.

Comme l'écart type exact σ est connu, on utilise le critère $\varepsilon_o = \left|(\overline{X}_0 - \mu)\right| / \sigma \sqrt{N}$

qui suit une loi normale centrée réduite. Le raisonnement est le même concernant Y et sa moyenne observée.

<u>Premier test</u> :

Test sur $\overline{X}_0$:

Le **critère de test** est $\varepsilon_o = \left|(6{,}8 - 7{,}0)\right| / 0{,}5 \mathrm{x} \sqrt{50}$

εo = 1,41 , qui donne αo= 15,7 % pour un test bilatéral (lecture de la table de la loi normale centrée réduite). Cette valeur de αo est très supérieure au risque seuil standard α=5%.

Conclusion du test :

On accepte **Ho**

Les différences observées pour la moyenne entre la population référence et l'échantillon sont imputables au hasard des fluctuations d'échantillonnage au risque seuil α=5% (et même au risque de 10% !). La moyenne observée est conforme à celle de la population référence.

<u>Deuxième test</u> :

Test sur $\overline{Y}_0$ **:**

Le **critère de test** est $\varepsilon_0 = |(2,6 - 2,5)| / 0,2 \times \sqrt{50}$

εo = 3,54 , qui donne αo= 0,04 % pour un test bilatéral (lecture de la table de la loi normale centrée réduite). Cette valeur de αo est très inférieure au risque seuil standard α=5%, elle est même quasi nulle !

Conclusion du test :

On rejette **Ho**

Les différences observées pour la moyenne des concentrations de pesticide entre la population référence et l'échantillon sont significatives au risque seuil α=5% (et même au risque de 1% !).

<u>Origine possible des différences constatées sur le 1^er^ échantillon</u> :

Ce deuxième test confirme celui réalisé en b/ : quelque chose ne va plus dans la production des citrons !

La moyenne observée pour le diamètre des citrons du 2$^{\text{ème}}$ échantillon est pratiquement la même que pour le 1$^{\text{er}}$ échantillon,

le doute concerne donc la variable Y : "concentration de pesticide absorbée par l'écorce d'un citron en mg/ml", qui explique les différences observées sur le premier échantillon et l'échec du test de conformité réalisé en **b/**.

Si l'on admet que le technicien a bien réalisé ses mesures sur un échantillon représentatif (Question 1-b/), la concentration de pesticide présente dans l'écorce des citrons est significativement différente de celle constatée dans la population référence (un test de conformité de la moyenne observée de Y pour le premier échantillon, donne εo = 2,96 soit αo = 0,31%!!!).

La concentration de pesticide absorbée par l'écorce des citrons est trop forte par rapport à la population référence. Il faudrait d'urgence faire une enquête sur l'épandage du pesticide sur les citrons.