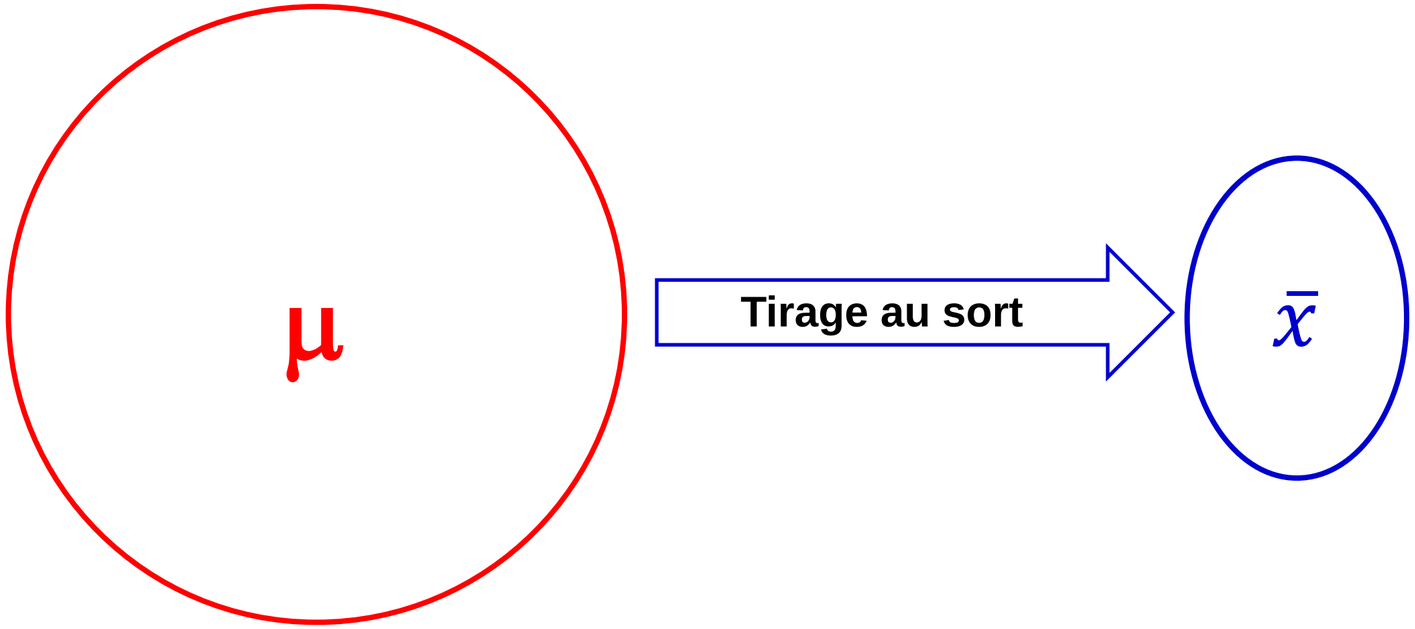
Test de conformité d'une moyenne d'échantillon à une moyenne de population

X : V.A. d'étude

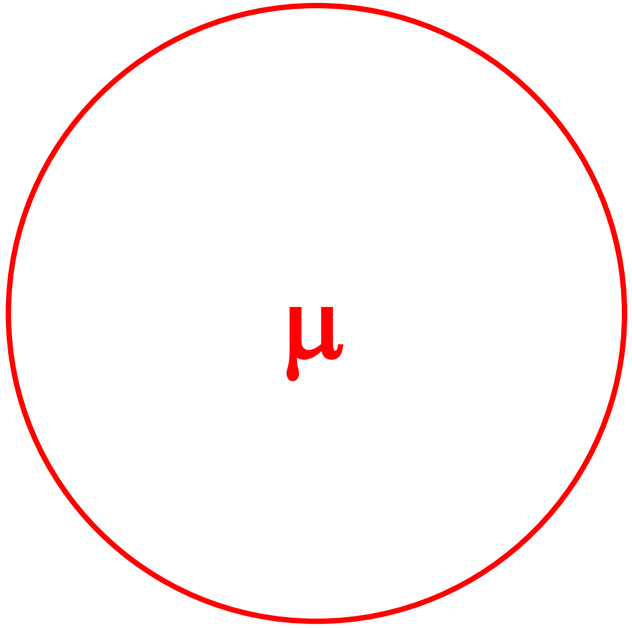


$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$: estimation de **μ**

Population caractérisée par la moyenne exacte **μ** *(référence)*

Test de conformité d'une moyenne d'échantillon à une moyenne de population

X : variable aléatoire suivant une loi N (μ,σ)

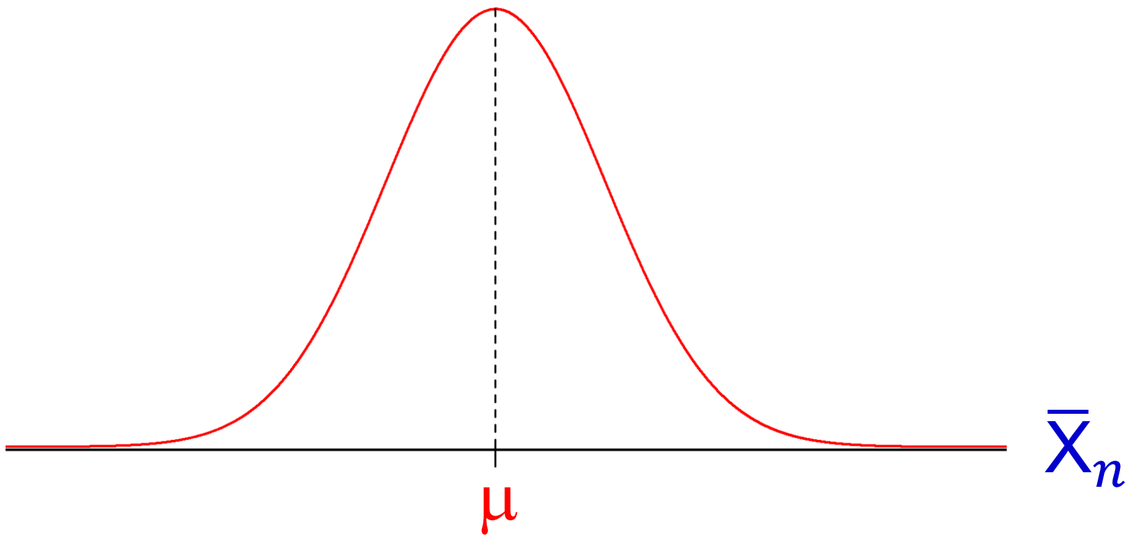


Population caractérisée par la moyenne exacte **μ** *(référence)*

Cas idéal : σ connu

Tirage au sort

Sur l'ensemble des échantillons possibles



$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

estimateur de μ

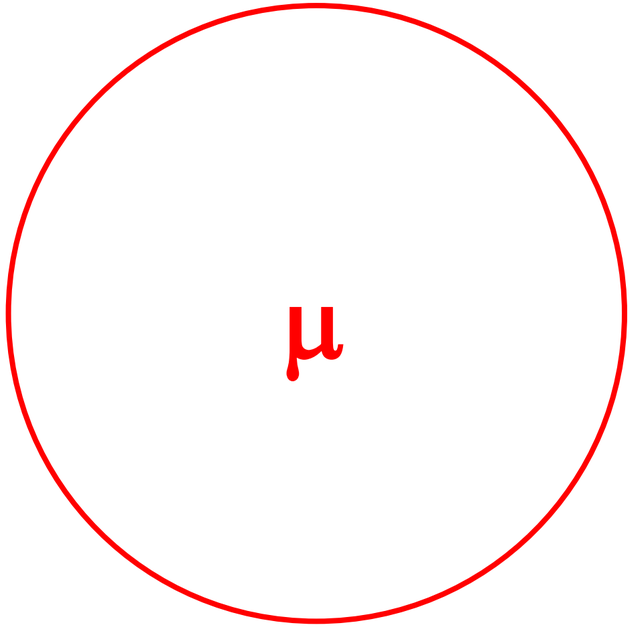
fluctuations d'échantillonnage de $\bar{x}$

Lorsque σ est connu, $\bar{X}_n$ suit une loi normale N(μ, σ^2/n)

$$E(\bar{X}_n) = \mu \qquad VAR(\bar{X}_n) = \sigma^2/n$$

Test de conformité d'une moyenne d'échantillon à une moyenne de population

X : variable aléatoire suivant une loi N (μ,σ)

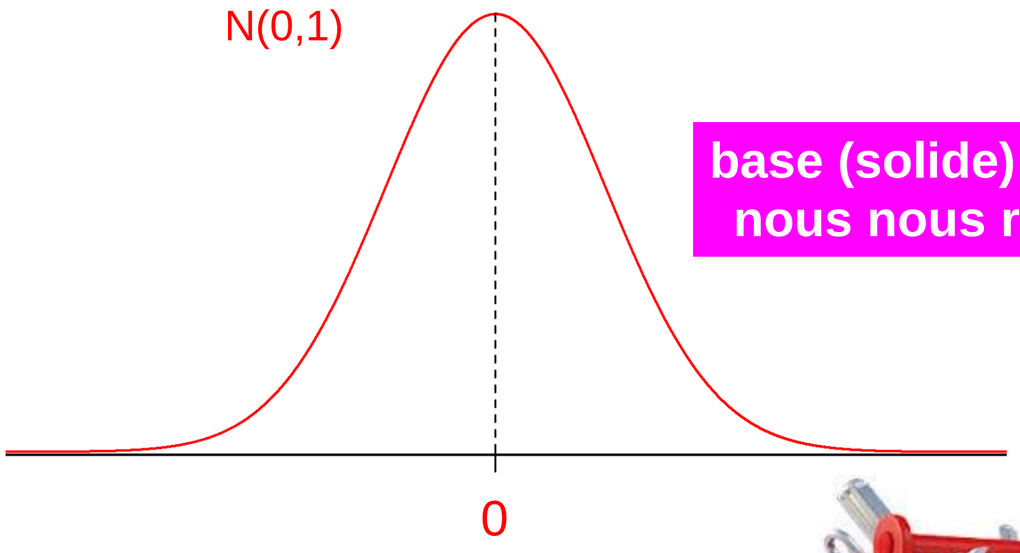


Population caractérisée par la moyenne exacte μ *(référence)*

Cas idéal : σ connu

Statistique de Test

Sur l'ensemble des échantillons possibles



base (solide) à laquelle nous nous réfèrerons

$$T_n = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Statistique de test

T_n

Lorsque σ est connu, T_n suit une loi normale centrée réduite N(0,1)

$$E(T_n) = 0 \qquad VAR(T_n) = 1$$

Test de conformité d'une moyenne d'échantillon à une moyenne de population

différences entre $\bar{x}$ et μ significatives?

$\bar{x}$ **conforme à la valeur attendue μ?**

μ

Population caractérisée par la moyenne exacte μ *(référence)*

X : V.A. d'étude

Test de conformité

$\bar{x}$

Échantillon (**n**)

Ho : m = μ

$\bar{X}_n$: estimateur de μ

H1 : m ≠ μ

test bilatéral

Risque seuil α

(risque standard : α=5%)

Statistique de test

$$T_n = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Cas idéal : σ connu

valeur « observée » de T_n obtenue à partir des données de l'échantillon :

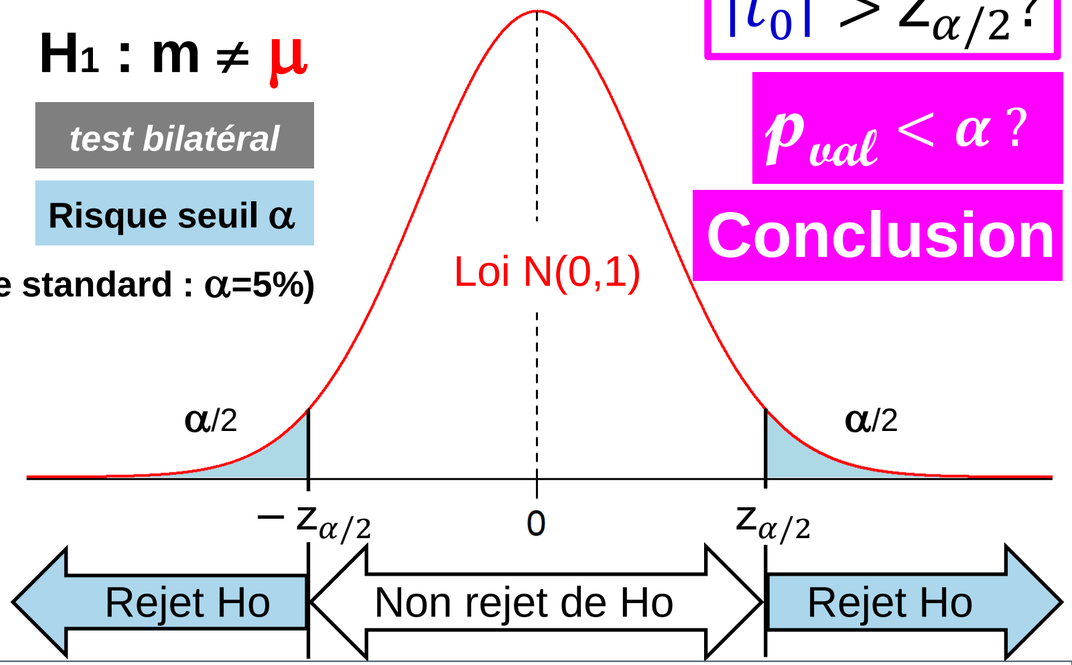
$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \rightarrow p_{val}$$

$P(Z < -t_0) + P(Z > t_0) < \alpha$?

$|t_0| > z_{\alpha/2}$?

$p_{val} < \alpha$?

Conclusion



Test de conformité d'une moyenne d'échantillon à une moyenne de population

différences entre $\bar{x}$ et μ significatives?

$\bar{x}$ **conforme à la valeur attend** μ**?**

μ

$\bar{x}$

Le principe reste le même pour les tests d'homogénéité et les intervalles de confiance

Population caractérisée par la moyenne exacte μ *(référence)*

X : V.A. d'étude

X_n : estimateur de μ

Échantillon (**n**)

Statistique de test

$$T_n = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

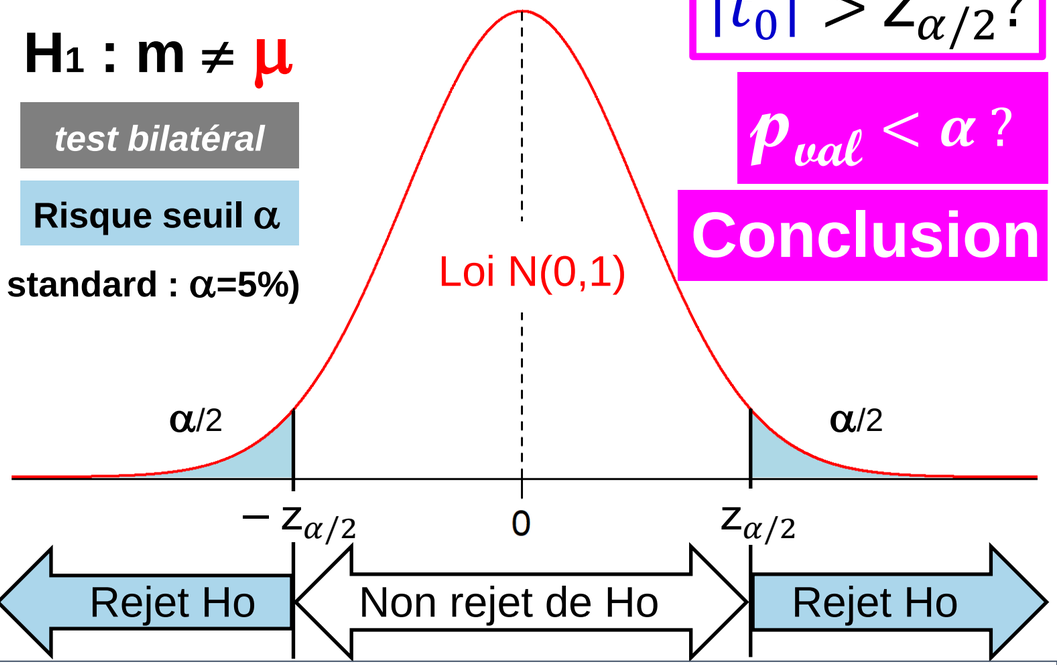
Cas idéal : σ connu

H₁ : m ≠ μ

test bilatéral

Risque seuil α

(risque standard : α=5%)



valeur « observée » de T_n obtenue à partir des données de l'échantillon :

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \rightarrow p_{val}$$

$$P(Z < -t_0) + P(Z > t_0) < \alpha\,?$$

$$|t_0| > z_{\alpha/2}?$$

$$p_{val} < \alpha\,?$$

Conclusion

p-value (valeur-p) : probabilité d'observer sous Ho

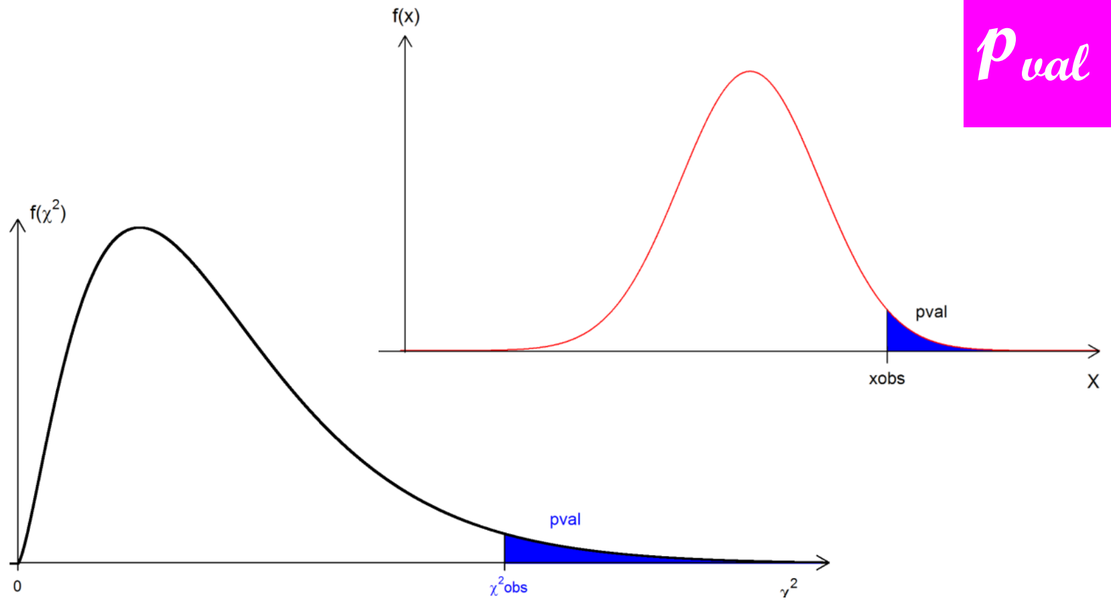
un résultat **égal ou plus extrême** que celui réellement observé

$p_{val} = P_{Ho}(X \geq xobs)$ test unilatéral (DR à droite)

$p_{val} = P_{Ho}(X \leq xobs)$ test unilatéral (DR à gauche)

$p_{val} = P_{Ho}(X \geq xobs) + P_{Ho}(X \leq xobs\_2)$ test bilatéral

$p_{val} = P_{Ho}(X \leq xobs) + P_{Ho}(X \geq xobs\_2)$ test bilatéral



Utilisée en statistique inférentielle pour conclure sur le résultat d'un test d'hypothèse

Pearson : en la comparant à α, risque seuil (définissant la puissance du test = 1-β)

Ronald Fisher : l'hypothèse nulle ne peut jamais être acceptée; elle peut être seulement rejetée par le test d'hypothèse, **la p-value mesure à quel point les données plaident contre l'hypothèse nulle Ho**

$p_{val} \leq 0{,}1\%$	présomption extrêmement forte contre l'hypothèse nulle	***
$0{,}1\% < p_{val} \leq 1\%$	très forte présomption contre l'hypothèse nulle	**
$1\% < p_{val} \leq 5\%$	forte présomption contre l'hypothèse nulle	*
$5\% < p_{val} \leq 10\%$	faible présomption contre l'hypothèse nulle	.
$p_{val} > 10\%$	pas de présomption contre l'hypothèse nulle	

Pour être plus clair….

inférence

Intervalle de confiance de μ

Le résultat

$7{,}1 < \mu < 7{,}9$

$\bar{X}_n \quad S_n^{*2}$ ***I.B.T.***

working zone

$\bar{x} = 7{,}5$

$s_x = 1{,}25$

Échantillon, taille n=36

▷ **Les données**

Comment faire parler les données ?

Population ▷ **μ inconnue**

▷ *estimation bcp plus crédible*

Statistique de Test
(Tests d'Hypothèse)

… pas de résultat fiable sans outils fiables !